Trigonalisation simultanée

Gourdon, p. 170

Lemme : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}(E)$ commutant 2-à-2. Alors il existe un vecteur propre commun à tous les $(f_i)_{i\in I}$

Par récurrence sur $n = \dim E$:

- si $n = 1$, tous les f_i sont des homothéties. Il n'y a donc rien à faire.
- supposons la propriété vraie au rang $n-1$.
  - Si tous les f_i sont des homothéties, c'est bon.
  - Sinon, $\exists j \in I$ tq f_j n'est pas homothétie. Puisque f_j est trigonalisable, $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}(f_j)$.

  Puisque f_j n'est pas une homothétie, $\dim E_\lambda < n$. Par commutativité, E_λ est stable par tous les f_i :

  $$\forall i \in I,\ \forall x \in E_\lambda,\ f_j(f_i(x)) = f_i(f_j(x)) = f_i(\lambda x) = \lambda f_i(x) \quad \text{i.e. } f_i(x) \in E_\lambda$$

  Par H.R, il existe un vecteur propre $x \in E_\lambda$ commun à tous les $f_i|_{E_\lambda}$, qui est donc un vecteur propre commun à tous les f_i car $f_i(x) = f_i|_{E_\lambda}(x) = \lambda_i x$.

Théorème : Sous les mêmes hypothèses, la famille $(f_i)_{i\in I}$ est co-trigonalisable.

Par récurrence sur $n = \dim E$:

- Si $n = 1$, tous les f_i sont des homothéties
- Supposons la propriété vraie au rang $n-1$.

  La famille $({}^tf_i)_{i\in I}$ commute 2-à-2 car ${}^tf_i \circ {}^tf_j = {}^t(f_j \circ f_i) = {}^t(f_i \circ f_j) = {}^tf_j \circ {}^tf_i$

  et les ${}^tf_i$ sont trigonalisables car $\chi_{{}^tf_i} = \chi_{f_i}$ qui est scindé.

  $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}^*,\mathcal{B}^*}({}^tf) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$ + $\det({}^tA) = \det(A)$

  Par le lemme précédent appliqué à $({}^tf_i)_{i\in I}$, $\exists \varphi \in E^*$ un vecteur propre commun.

  Soit $H = (\mathbb{K}\varphi)^\circ$. Alors H est un hyperplan de E et stable pour tous les f_i car :

  $$\forall i \in I,\ \forall x \in H,\ \varphi(f_i(x)) = \underbrace{{}^tf_i(\varphi)}_{=\lambda_i\varphi}(x) = \lambda_i \underbrace{\varphi(x)}_{=0 \text{ car } x \in (\mathbb{K}\varphi)^\circ} = 0 \quad \text{i.e. } f_i(x) \in H = (\mathbb{K}\varphi)^\circ$$

  De plus, les $f_i|_H$ sont trigonalisables car $\chi_{f_i|_H} \mid \chi_{f_i}$ qui est scindé.

  Par H.R., $\exists \mathcal{B}$ base commune de trigonalisation des $f_i|_H$ i.e. :

  $$\forall i \in I,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i|_H) = \begin{pmatrix} * & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & * \end{pmatrix}$$

  On complète alors $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{e\}$ tel que $\mathcal{B}'$ soit une base de E.

  $$\forall i \in I,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_i) = \left(\begin{array}{ccc|c} & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i|_H) & & * \\ & & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right)$$

  Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une base commune de trigonalisation des f_i.